Početní část 1 - 21.1.2021

1. Očividně je $f(x)$ spojitá na $\{x \leq 0\}$ a $g(x)$ spojitá na $\{x > 0\}$ pro libovolné hodnoty konstant A, B, C. Máme $f(0) = 1$ a $\lim_{x \to 0_+} g(x) = B$, odtud tedy $B = 1$.

   První derivace:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \log\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)} \cdot \frac{x-1}{2x-1} \cdot \frac{2(x-1) - (2x-1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{1}{1 + \log\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)} \cdot \frac{-1}{(2x-1)(x-1)} \end{aligned}$$

   a odtud $f'(0) = -1$.

$$g'(x) = AB\cos(Bx) - BC\sin(Cx)$$

   a $\lim_{x \to 0_+} g'(x) = AB$. Odtud $AB = -1$ a tedy $A = -1$.

   Druhá derivace:

$$\begin{aligned} f''(x) = &-\frac{1}{(1 + \log\left(\frac{2x-1}{x-1}\right))^2} \cdot \left(\frac{-1}{(2x-1)(x-1)}\right)^2 \\ &- \frac{1}{1 + \log\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)} \cdot \left(\frac{-2}{(2x-1)^2(x-1)} + \frac{-1}{(2x-1)(x-1)^2}\right) \end{aligned}$$

   a odtud

$$f''(0) = -1 - (2 + 1) = -4.$$

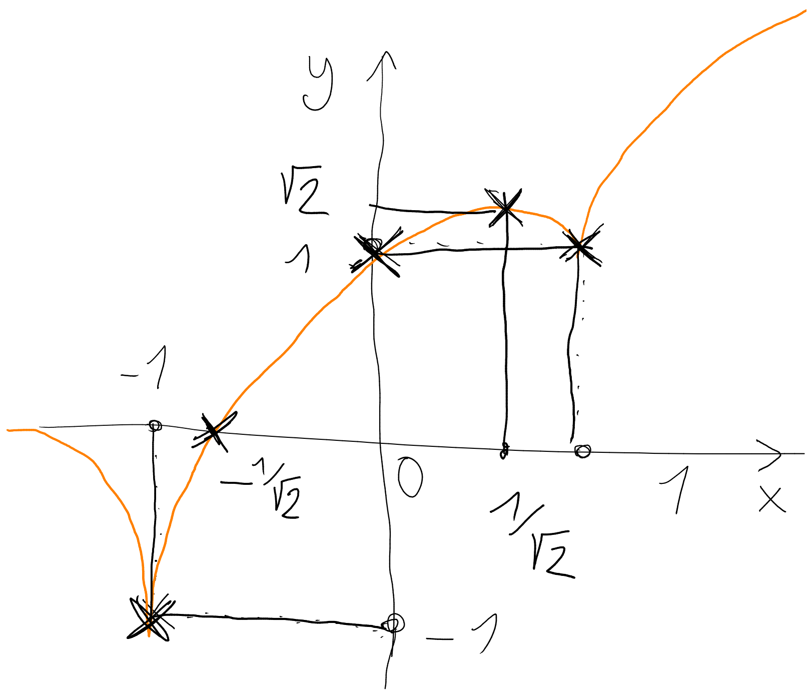
$$g''(x) = -AB^2\sin(Bx) - BC^2\cos(Cx)$$

   a $\lim_{x \to 0_+} g''(x) = -BC^2$. Odtud $-BC^2 = -4$ a tedy $C = \pm 2$. Existují tedy dvě hledané trojice, $(-1, 1, 2)$ a $(-1, 1, -2)$.

2. Funkce
$$g(x) = \sqrt{|x^2-1|} + x$$
má definiční obor $\mathbb{R}$ a je na něm spojitá. Není sudá, lichá, ani periodická. Limity v nekonečnu jsou $g(-\infty) = 0$, $g(+\infty) = +\infty$. Mechanickým derivováním dostaneme
$$g'(x) = 1 + \frac{s(x)x}{\sqrt{|x^2-1|}}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\},$$
kde $s(x) := \operatorname{sgn}(|x|-1)$. Limity derivací v obou kritických bodech ± 1 jsou $-\infty$ zleva a $+\infty$ zprava. V těchto bodech derivace neexistuje. Dále
$$\lim_{x\to\infty} g'(x) = 2, \quad \lim_{x\to\infty} g'(x) = 0.$$
Kromě těchto bodů podezřelých z extrémů najdeme další tak, že vyřešíme
$$-s(x)x = \sqrt{|x^2-1|},$$
což má jediné řešení
$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$
Dostaneme celkem 4 intervaly, na kterých derivace nemění znaménko a tudíž g je monotónní – viz tabulka:

x	$(-\infty,-1)$	$\left(-1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)$	$(1,+\infty)$
g'	$+$	-	$+$	-
g	$0 \searrow -1$	$-1 \nearrow \sqrt{2}$	$\sqrt{2} \searrow 1$	$1 \nearrow \infty$

Vidíme tedy, že $g(-1) = -1$ je lokální i globální minimum, $g(1) = 1$ je lokální minimum, $g(1/\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ je lokální maximum. Obor hodnot g je tedy $[-1,\infty)$. Druhá derivace je
$$g''(x) = -|x^2-1|^{-3/2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\},$$
Funkce g je tudíž konkávní na intervalech $(-\infty,-1]$, $[-1,1]$, $[1,+\infty)$. (Není ovšem konkávní na žádném větším intervalu, neboť konkávní funkce nemohou mít nikdy lokální minima.) Žádné inflexní body nejsou.
$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = 2, \quad \lim_{x\to\infty} g(x) - 2x = 0.$$
Tedy $2x$ je asymptota v $+\infty$, v $-\infty$ je asymptota 0.


y
$\sqrt{2}$
1
-1
$-1/\sqrt{2}$
0
$1/\sqrt{2}$
1
x
-1